SESSION DE 1988 Option T'-Math 2

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. COEFFICIENT : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

L'objectif du problème est d'étudier une méthode d'approximation uniforme des fonctions continues par des polynômes.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $\mathcal{C}(I)$ l'algèbre des fonctions continues sur I à valeurs réelles. Soit enfin $\mathfrak{M}_+(I)$ l'ensemble des formes linéaires μ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ telles que, pour tout élément $f \geqslant 0$ de $\mathcal{C}(I)$, $\mu(f) \geqslant 0$.

I. Formes linéaires positives

Soit μ un élément de $\mathfrak{M}_+(I)$.

1. Prouver que, pour tout élément f de $\mathcal{C}(I)$, $|\mu(f)| \leqslant \mu(|f|)$.

2. Prouver que, pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{C}(I)$,

$$(\mu(fg))^2 \leqslant \mu(f^2)\,\mu(g^2)$$

(Inégalité de Schwarz).

3. Soit h un élément de $\mathcal{C}(I)$ à valeurs strictement positives. Montrer que, si $\mu \neq 0$, $\mu(h) > 0$.

4. Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}(I)$ convergeant uniformément vers 0 sur I. Montrer que $(\mu(f_n))$ converge vers 0.

5. Dans cette question, on suppose que $I = \mathbb{R}$.

   a. Prouver qu'il existe un nombre réel strictement positif α tel que, pour tout élément g de $\mathcal{C}(I)$ nul sur $[-\alpha, \alpha]$, $\mu(g) = 0$.

   On raisonnera par l'absurde en montrant que, pour tout entier naturel non nul n, il existe alors un élément g_n de $\mathcal{C}(I)$ à valeurs positives, nul sur $[-n, n]$ et tel que $\mu(g_n) = 1$. On introduira la suite des fonctions

$$h_p = \sum_{n=1}^{p} g_n .$$

   b. Soit α un tel nombre réel. Prouver que, pour tout élément f de $\mathcal{C}(I)$,

$$|\mu(f)| \leqslant \beta \sup_{t \in [-\alpha, \alpha]} |f(t)|, \quad \text{où} \quad \beta = \mu(1).$$

   On pourra introduire la suite (φ_n) des fonctions définies par les relations :

$$\varphi_n(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \in [-\alpha, \alpha], \qquad \varphi_n(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \notin \left]-\alpha-\frac{1}{n}, \alpha+\frac{1}{n}\right[,$$

   φ_n est affine sur les intervalles $\left[-\alpha-\frac{1}{n}, -\alpha\right]$ et $\left[\alpha, \alpha+\frac{1}{n}\right]$.

II. Endomorphismes positifs

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes v de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ tels que $v(1) = 1$ et que, pour tout élément positif f de $\mathcal{C}(I)$, $v(f)$ soit positif.

On désigne par $\mathcal{M}_1(I)$ l'ensemble des éléments μ de $\mathcal{M}_+(I)$ tels que $\mu(1) = 1$. Pour tout entier naturel non nul p, on désigne par e_p la fonction définie sur I par la relation $e_p(t) = t^p$.

1. Soit v un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$. Montrer que v appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si, pour tout point a de I, l'application μ_a définie par la relation $\mu_a(f) = (v(f))(a)$ appartient à $\mathcal{M}_1(I)$.

2. Soit v un élément de $\mathcal{E}$.

   a. Prouver que, pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{C}(I)$, la relation $f \leqslant g$ implique la relation $v(f) \leqslant v(g)$.

   b. Prouver que, pour tout élément f de $\mathcal{C}(I)$, $|v(f)| \leqslant v(|f|)$.

   c. Prouver que, pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{C}(I)$, $(v(fg))^2 \leqslant v(f^2)\, v(g^2)$.

   d. Prouver que, pour tout élément f de $\mathcal{C}(I)$, $(v(f))(I)$ est contenu dans $f(I)$.

III. Approximation des fonctions continues par la méthode des noyaux linéaires positifs

On suppose que l'intervalle I est compact. Pour tout élément f de $\mathcal{C}(I)$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$ et, pour tout nombre réel strictement positif δ, on pose

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in I \\ |x-y| \leqslant \delta}} |f(x) - f(y)|.$$

(La fonction ω_f s'appelle module de continuité de f.)

1. Montrer que $\omega_f(\delta)$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0.

2. Soit b un point de I. Prouver que, pour tout nombre réel strictement positif δ et pour tout point t de I,

$$|f(t) - f(b)| \leqslant \omega_f(\delta) + \frac{2}{\delta^2} \|f\|_\infty (t - b)^2.$$

3. Soient v un élément de $\mathcal{E}$ et b un point de I. Prouver que, pour tout nombre réel strictement positif δ et pour tout point x de I,

$$|(v(f))(x) - f(b)| \leqslant \omega_f(\delta) + \frac{2}{\delta^2} \|f\|_\infty [(v(e_2))(x) - 2b\,(v(e_1))(x) + b^2].$$

4. Soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

   a. La suite $(v_n(e_1))$ converge uniformément sur I vers une fonction φ ;

   b. La suite $(v_n(e_2))$ converge uniformément sur I vers la fonction φ^2.

   Montrer que la fonction φ est continue sur I à valeurs dans I et que, pour tout élément f de $\mathcal{C}(I)$, la suite $(v_n(f))$ converge uniformément vers $f \circ \varphi$.

5. Soit (v_n) une suite d'élément de $\mathcal{E}$. Prouver qu'il est équivalent de dire :

   a. Pour tout élément f de $\mathcal{C}(I)$, la suite $(v_n(f))$ converge uniformément sur I vers f ;

   b. Les suites $(v_n(e_1))$ et $(v_n(e_2))$ convergent uniformément sur I respectivement vers e_1 et vers e_2.

Tournez la page S. V. P.

IV. Approximation polynomiale

On suppose que $I = [0,1]$.

1. Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k inférieur à n, on pose :

$$B_{n,k} = C_n^k X^k . (1 - X)^{n-k}.$$

Établir les relations suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k} = nX \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k} = n(n-1) X^2.$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout élément f de $\mathcal{C}(I)$, on désigne par $u_n(f)$ la fonction définie sur I par la relation :

$$(u_n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

Montrer que u_n appartient à $\mathcal{E}$ et que $u_n(e_1) = e_1$. Déterminer la fonction $u_n(e_2)$, et calculer $\| u_n(e_2) - e_2 \|_\infty$.

3. En déduire que

$$\| u_n(f) - f \|_\infty \leqslant \omega_f(\delta) + \frac{1}{2n\delta^2} \| f \|_\infty .$$

En particulier, $(u_n(f))$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f.

4. On suppose que f est lipschitzienne dans un rapport β. En utilisant l'inégalité de Schwarz, prouver que $\| u_n(f) - f \|_\infty$ est dominé par $\frac{1}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire majoré par $\frac{\lambda}{\sqrt{n}}$, où $\lambda > 0$.

Montrer qu'on ne peut pas améliorer ce résultat, en considérant le cas où $f(x) = \sup(2x - 1, 0)$.

5. On suppose que f est de classe C^1 et que f' est lipschitzienne dans un rapport γ. Prouver que $\| u_n(f) - f \|_\infty$ est dominé par $\frac{1}{n}$. (Pour tout élément k de $[0, n]$, on pourra écrire que

$$f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) = \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x) + \int_x^{\frac{k}{n}} [f'(t) - f'(x)]\, dt.\Big)$$

Montrer qu'on ne peut pas améliorer ce résultat, même si f est de classe C^∞, en considérant le cas où $f(x) = x^2$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail